Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (34 BE)	Block 2 Stochastik (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

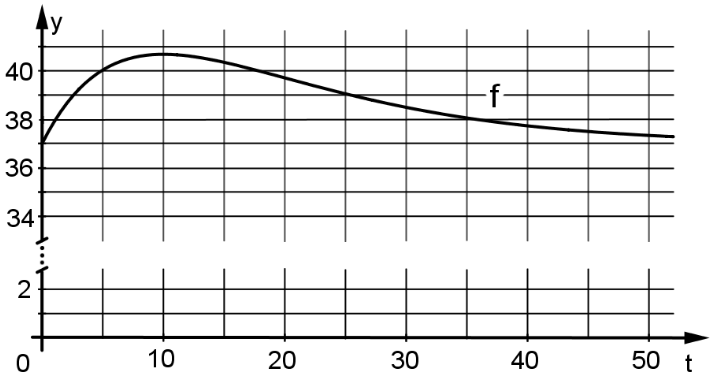
- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 175 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren.
Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit $37{,}0\,°C$ angenommen. Bei Temperaturen ab $37{,}9\,°C$ spricht man von Fieber.



Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 37 + t \cdot e^{-0{,}1t}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Stunden nach dem Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$. Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Stunden, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

a) Berechnen Sie
- die Körpertemperatur beim Ausbruch der Krankheit,
- die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten 5 Stunden,
- die maximale Körpertemperatur der erkrankten Person.

Berechnen Sie $f'(2)$ und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur der erkrankten Person am stärksten abnimmt. (14 BE)

b) Hat eine Person Fieber, wird der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Geraden zu $y = 37{,}9$ als ein Maß für die Belastung der erkrankten Person angenommen.

Bestimmen Sie den Wert der Belastung für den gesamten Zeitraum, in dem die erkrankte Person Fieber hat.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Belastung der erkrankten Person den Wert von 25 überschreitet.

Die erkrankte Person nimmt 20 Stunden nach Ausbruch der Krankheit ein fiebersenkendes Medikament ein. Man geht davon aus, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur linear abnimmt. Dabei nimmt die Temperatur im linearen Modell doppelt so schnell ab wie die Temperatur nach 20 Stunden im durch f beschriebenen Modell. Berechnen Sie, wie viel früher die erkrankte Person mit Medikamenteneinnahme fieberfrei ist. (15 BE)

c) Die Funktion f wird jetzt unabhängig vom Sachzusammenhang betrachtet.
Durch jeden Punkt $P(p \mid f(p))$, $p \geq 0$, verläuft eine Tangente an den Graphen von f. Für jeden Wert von p wird die Tangente durch die Gleichung
$y = (1 - 0{,}1p) \cdot e^{-0{,}1p} \cdot x + 37 + 0{,}1p^2 \cdot e^{-0{,}1p}$ beschrieben.
Zeigen Sie, dass es genau eine Tangente mit kleinstem y-Achsenabschnitt und genau eine Tangente mit größtem y-Achsenabschnitt gibt. (5 BE)

Aufgabe 1B

Für die Gartenschau „Mathematischer Garten“ wird die Gestaltung einer quadratischen Gartenfläche geplant. Diese soll durch einen Weg in eine Blumenfläche und eine Sträucherfläche aufgeteilt werden. Die Blumenfläche liegt nördlich des Weges. In der Planungsphase werden verschiedene Modelle der Gartenfläche mit einer Seitenlänge von einem Meter (m) hergestellt. Der Weg wird dabei modellhaft durch Funktionsgraphen beschrieben. Ein mögliches Modell der Gartenfläche mit Weg ist in Abbildung 1 dargestellt. Alle zu berechnenden Größen beziehen sich auf die jeweiligen Modelle.

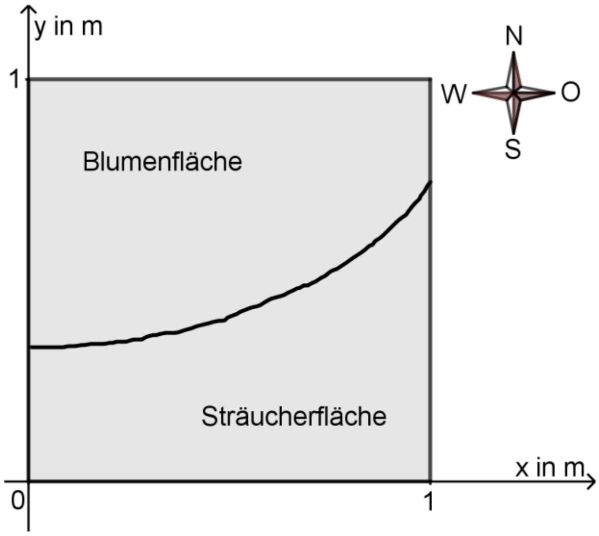


Abbildung 1

a) Im ersten Modell soll der Weg durch den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{15}x+\frac{1}{5}$, $0 \le x \le 1$, beschrieben werden. Dabei werden x und $f(x)$ jeweils in Metern angegeben.
Untersuchen Sie, durch welche Ecken des quadratischen Modells der Weg verläuft.
Skizzieren Sie den Weg im Koordinatensystem der Abbildung 2.

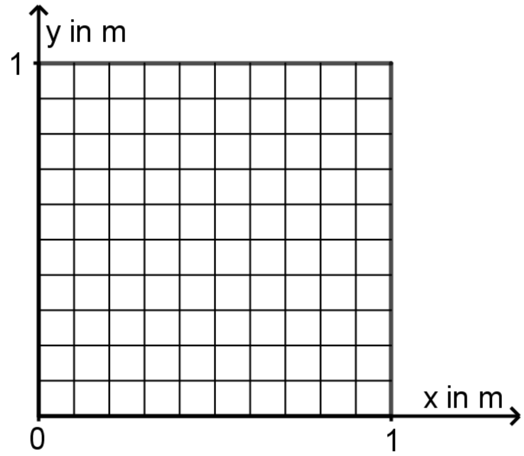


Abbildung 2

Bestimmen Sie die Inhalte von Blumen- und Sträucherfläche.
Ermitteln Sie Anfangs- und Endpunkt des Wegabschnittes, in dem der Abstand zur nördlichen Grenze der Gartenfläche mindestens 0,3 m beträgt.
Geben Sie einen Term an, der die Summe der Abstände zwischen einem beliebigen Punkt auf dem Weg und den beiden östlichen Eckpunkten der Gartenfläche beschreibt. (10 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1B auf der nächsten Seite

Fortsetzung Aufgabe 1B

b) Ein zweites Modell verwendet zur Beschreibung des Weges den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x$, $0 \le x \le 1$. Dabei werden x und $g(x)$ jeweils in Metern angegeben. Auf dem Weg von der westlichen zur östlichen Grenze der Gartenfläche gibt es zwei Punkte, an denen man genau in Richtung Osten läuft.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte.

Auf dem Weg von der westlichen zur östlichen Grenze der Gartenfläche schließt im Punkt $P(0{,}2 \mid g(0{,}2))$ ein geradliniger Nebenweg ohne Knick an den Weg aus dem zweiten Modell an.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem man über den Nebenweg auf die nördliche oder östliche Außengrenze der Gartenfläche trifft.

Ein Streifen der Blumenfläche soll mit rotblühenden Blumen bepflanzt werden. Das hierzu ausgewählte Teilstück ist in der Abbildung 3 grafisch dargestellt.
Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt. (17 BE)

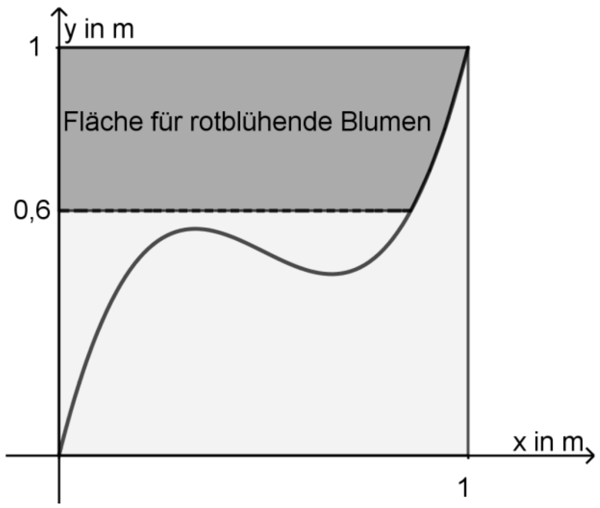


Abbildung 3

c) In einem dritten Modell wird der Weg durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + \frac{1}{4}$, $0 \le x \le 1$, beschrieben. Dabei werden x und $h(x)$ jeweils in Metern angegeben. Der zugehörige Weg verläuft durch die nordöstliche Ecke der Gartenfläche und teilt diese so auf, dass die Fläche nördlich des Weges 60% der gesamten Gartenfläche beinhaltet.
Ermitteln Sie die Werte für a und b, sodass diese Bedingungen erfüllt sind. (7 BE)

Aufgabe 2A

In einer Urne befinden sich Kugeln. 35 % der Kugeln sind mit „$+1$“ beschriftet, 25 % mit „$+2$“, die übrigen mit „-3“.

a) 100-mal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
E1: Mehr als 30 und weniger als 45 der entnommenen Kugeln sind mit „$+1$“ beschriftet.
E2: Die ersten drei entnommenen Kugeln sind mit „$+1$“ beschriftet.
Zeigen Sie, dass die Anzahl der in der Urne insgesamt enthaltenen Kugeln kleiner als 100 sein kann. (6 BE)

b) Unter Verwendung der Urne wird ein Spiel durchgeführt. Dabei wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zahlen auf den entnommenen Kugeln werden addiert. Ist das Ergebnis positiv, gewinnt der Spieler den Wert der Summe als Betrag in Euro, ist das Ergebnis negativ, verliert er den entsprechenden Betrag.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel mehr als 3 Euro gewinnt.
Ermitteln Sie für einen Spieler mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung den durchschnittlichen Verlust pro Spiel. (6 BE)

c) Die Anzahl der in der Urne tatsächlich enthaltenen Kugeln ist n. In die Urne werden zwei zusätzliche Kugeln gelegt, eine davon ist mit „$+1$“ beschriftet, die andere mit „$+2$“. Anschließend wird eine Kugel zufällig entnommen.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „$+1$“ beschriftet ist, durch den Term $\frac{0{,}35n+1}{n+2}$ angegeben wird.
Entscheiden Sie, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel mit „+1“ beschriftet ist, durch die zusätzlichen Kugeln größer oder kleiner wird. (5 BE)

Aufgabe 2B

2000 Personen besitzen eine Jahreskarte eines Schwimmbades. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

a) Es gilt $P(X=210)\approx 2{,}2\%$.

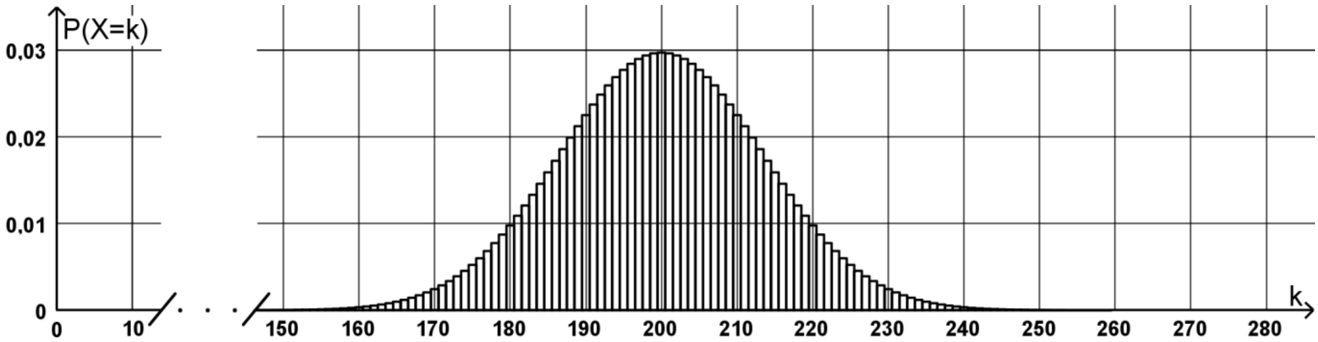
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Tag mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X mindestens eine halbe Standardabweichung größer als der Erwartungswert der Zufallsgröße ist.

Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Tag weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist. (11 BE)

Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Verteilung der Zufallsgröße X.



b) Begründen Sie mithilfe der Abbildung ohne weitere Berechnung die Abschätzung $P(X\le 200)\approx 50\%$.

Geben Sie ganzzahlige Werte a und b mit $0\le a\le 2000$ und $0\le b\le 2000$ so an, dass $P(a\le X\le b)\le 50\%$ und der Abstand der Werte a und b maximal ist.

Die Betreiber des Schwimmbades planen für das Folgejahr eine Erhöhung der Anzahl der Jahreskartenbesitzer auf 2300. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an einem bestimmten Tag das Schwimmbad besucht, soll weiterhin mit 10 % angenommen werden. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad an diesem Tag besuchen. Man geht davon aus, dass Y binomialverteilt ist. Der Erwartungswert von Y hat den Wert 230, die Standardabweichung beträgt etwa 14,4.

Weisen Sie mithilfe von σ-Umgebungen nach, dass nun $P(Y\le 200)<2{,}5\%$ gilt. (6 BE)

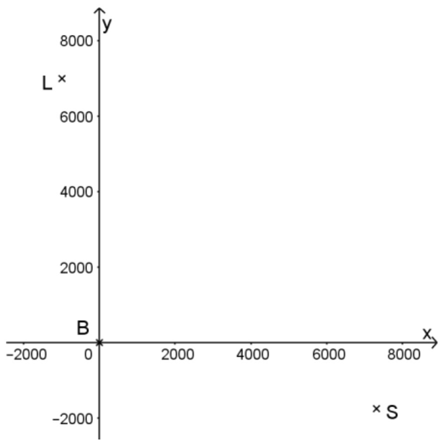
Aufgabe 3A

Ein Unternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe einer Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die xy-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320\,|\,-1750\,|\,0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990\,|\,6990\,|\,0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a) Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.
Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, verläuft.
Der Parameter r gibt die Flugdauer in 1000 Sekunden an.
Weisen Sie nach, dass der Punkt P mit den Koordinaten $(4827\,|\,872\,|\,50)$ die Position der Drohne nach 300 Sekunden Flugdauer beschreibt.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne in Metern pro Sekunde während des horizontalen Flugs. (6 BE)

Während des Flugs auf der vorgesehenen Flugbahn entlang der Geraden g aus Aufgabenteil a) wird die Flugbahn von einer Bodenstation aus überwacht. Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0\,|\,0\,|\,0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

b) Untersuchen Sie, ob sich die Drohne in der durch den Punkt $T(6489\,|\,-876\,|\,50)$ dargestellten Position innerhalb oder außerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet.
Bewegt sich die Drohne auf der vorgesehenen Flugbahn, so befindet sie sich von einem bestimmten Zeitpunkt an innerhalb der Reichweite der Bodenstation.
Ermitteln Sie die Position, in der sich die Drohne zu diesem Zeitpunkt befindet.
In einer Position auf der vorgesehenen Flugbahn hat die Drohne die geringste Entfernung zur Bodenstation. Diese Position wird durch den Punkt R beschrieben.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem unter Verwendung der Abbildung die Koordinaten von R ermittelt werden könnten. (8 BE)



c) Die Bodenstation ändert die Flugbahn der Drohne: Die Drohne weicht im Modell im Punkt $Q(3996\,|\,1746\,|\,50)$ von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt $A(3900\,|\,1700\,|\,0)$ dargestellt wird.
Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert. (3 BE)

Aufgabe 3B

Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca.
Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die 140 Meter lange Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden. Die dreieckigen Grundflächen dieser Prismen sind kongruent.

Der Boden des Gebäudes sowie die Startbahnen des Flughafens liegen im Modell in der xy-Ebene. Die Seitenkanten der Prismen verlaufen parallel zur y-Achse. Die Punkte $A(7|0|4)$, $B(0|0|4)$ und $C(3{,}5|0|7{,}5)$ sind Eckpunkte eines der Prismen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und im Punkt C rechtwinklig ist. (3 BE)

Der Abbildung liegt ein Foto zugrunde. Die Position der Kamera, mit der dieses Foto aufgenommen wurde, wird durch den Punkt $K(30|20|1{,}5)$ dargestellt. Die weiße Dachfläche, die mit dem Schriftzug „Aeropuerto de Palma de Mallorca“ versehen ist, liegt im Modell in der Ebene E.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Ein mögliches Ergebnis ist: $E: x + z = 11$.)

Eine Sichtlinie verläuft von der Kamera geradlinig zum Mittelpunkt der weißen Dachfläche.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Sichtlinie mit der Dachfläche einschließt. (7 BE)

Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Erst ab einer bestimmten Höhe h über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar.

c) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze an, die die Gültigkeit folgender Aussage verdeutlicht:
Diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, spielen für die Ermittlung der Höhe h keine Rolle.

Die Spitze des startenden Flugzeugs bewegt sich im Modell entlang der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie die Entfernung der Flugzeugspitze von der Kamera zu dem Zeitpunkt, zu dem sich die Spitze in einer Höhe von 450 m befindet. (7 BE)