Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 94 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 120 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis (46 BE)	Block 2 Stochastik (24 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (24 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- **Wählen Sie aus jedem Block genau eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.**

  Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Hilfsmittel für den Wahlteil

1. Zeichenmittel
2. eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben (mit Handbuch)
3. von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 1A

Unter der Körpertemperatur eines Menschen versteht man die Temperatur des Körperinneren. Die Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Normaltemperatur) wird mit $37{,}0\,°C$ angenommen. Bei Temperaturen ab $37{,}9\,°C$ spricht man von Fieber.

Der zeitliche Verlauf der Körpertemperatur einer erkrankten Person lässt sich bei bestimmten Erkrankungen modellhaft mithilfe der Funktion f mit $f(t) = 37 + 3t \cdot e^{-\frac{1}{7}t^2}$, $t \geq 0$, beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen nach dem Ausbruch der Krankheit und $f(t)$ die Körpertemperatur in $°C$.

Die Ableitungsfunktion f' ist gegeben durch $f'(t) = \left(3 - \frac{6}{7}t^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{7}t^2}$.

Die zu ermittelnden Zeiten sollen in Tagen, auf eine Nachkommastelle gerundet, angegeben werden.

a) Berechnen Sie
- die Abweichung der Körpertemperatur der erkrankten Person am Ende des ersten Tages von der Normaltemperatur,
- die Länge des Zeitraumes, in dem die Person Fieber hat.

Berechnen Sie $f'(2)$ und deuten Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Nennen Sie zwei Aspekte, die verdeutlichen, dass es sich bei diesem Modell um eine Vereinfachung der Realität handelt. (11 BE)

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur der Person am stärksten ansteigt, und den Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt.

Die Temperatur der Person sinkt zu einem Zeitpunkt unter $37{,}5\,°C$.

Begründen Sie mithilfe des Terms der 1. Ableitung von f, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur dauerhaft unter $37{,}5\,°C$ bleibt. (11 BE)

c) Eine andere Person mit gleichem Krankheitsverlauf nimmt 3 Tage nach Ausbruch der Krankheit ein fiebersenkendes Medikament ein. Man geht davon aus, dass ab diesem Zeitpunkt die Temperatur exponentiell abnimmt und sich der Normaltemperatur nähert. Sechs Stunden nach der Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur $37{,}6\,°C$.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt nach der Medikamenteneinnahme, zu dem die Person fieberfrei wird. (9 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A auf der nächsten Seite

Fortsetzung Aufgabe 1A

d) Die Funktionen f_k mit $f_k(t) = 37 + 3t \cdot e^{-k \cdot t^2}$, $t \geq 0$, $k > 0$, können ebenfalls modellhaft den Temperaturverlauf bei bestimmten Erkrankungen beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Tagen nach dem Ausbruch der Krankheit und $f_k(t)$ die Körpertemperatur in $°C$. Der Parameter k hängt von der maximalen Körpertemperatur während der Erkrankung ab.
Für jeden Wert von k sind die Ableitungsfunktion f_k' durch $f_k'(t) = \left(3 - 6k \cdot t^2\right) \cdot e^{-k \cdot t^2}$ und eine Stammfunktion F_k durch $F_k(t) = 37t - \frac{3}{2k} \cdot e^{-k \cdot t^2}$ gegeben. Für jeden Wert von k hat der Graph von f_k genau einen Hochpunkt.
In der Abbildung 1 sind die Graphen der Funktionen $f_{0,1}$ und $f_{0,2}$ dargestellt.

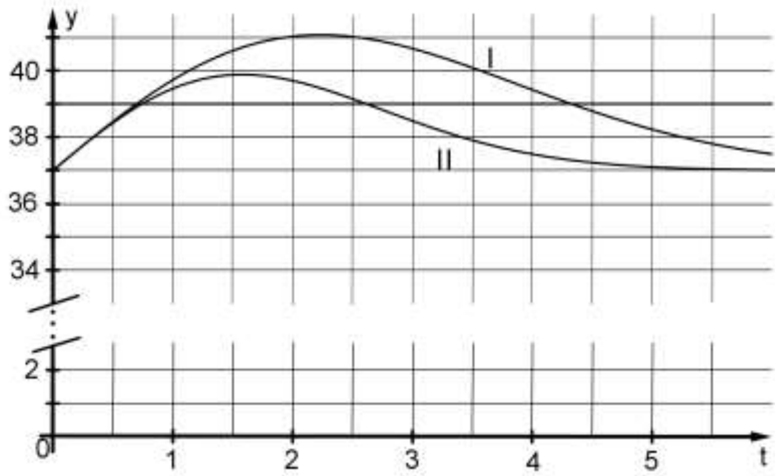


Abbildung 1

Entscheiden Sie, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.
Für jeden Wert von k wird der Inhalt $A(k)$ der Fläche zwischen dem Graphen von f_k und der Geraden zu $y = 37$ als ein Maß für die Belastung einer erkrankten Person angenommen.
Zeigen Sie, dass $A(k) = \frac{3}{2k}$ gilt.
Bestimmen Sie alle Werte von k, für die die Graphen von f_k einen Temperaturverlauf ohne Fieber beschreiben. (15 BE)

Aufgabe 1B

Für die Gartenschau „Mathematischer Garten“ wird die Gestaltung einer quadratischen Gartenfläche geplant. Diese soll durch einen Weg in eine Blumenfläche und eine Sträucherfläche aufgeteilt werden. Die Blumenfläche liegt nördlich des Weges. In der Planungsphase werden verschiedene Modelle der Gartenfläche mit einer Seitenlänge von einem Meter (m) hergestellt. Der Weg wird dabei modellhaft durch Funktionsgraphen beschrieben. Alle zu berechnenden Größen beziehen sich auf die jeweiligen Modelle.

a) Im ersten Modell soll der Weg durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x$, $0 \le x \le 1$, beschrieben werden. Dabei werden x und $f(x)$ jeweils in Metern angegeben. Das entsprechende Modell ist in Abbildung 1 dargestellt.
Weisen Sie nach, dass der Weg durch zwei Ecken des quadratischen Modells verläuft.
Untersuchen Sie, ob der Weg die Gartenfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Stücke teilt.

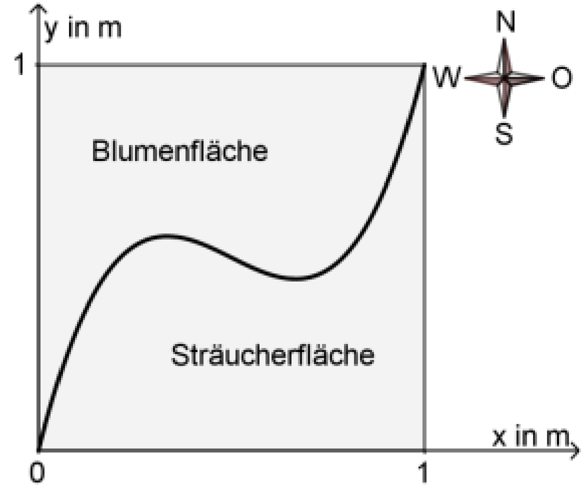


Abbildung 1

Auf dem Weg von der westlichen zur östlichen Grenze der Gartenfläche gibt es zwei Punkte, an denen man genau in Richtung Osten läuft, und einen Punkt, an dem man von einer Rechtskurve in eine Linkskurve wechselt.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser drei Punkte. (11 BE)

b) Für das Modell aus Teilaufgabe a) soll ein Streifen der Blumenfläche mit rotblühenden Blumen bepflanzt werden. Das hierzu ausgewählte Teilstück ist in der Abbildung 2 grafisch dargestellt.
Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.
Am Punkt $B(0{,}6\,|\,0{,}7)$ soll eine Bewässerungsanlage aufgestellt werden, die um ihren Standort B ein kreisförmiges Gebiet mit einem Radius von 0,25 m bewässert.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $W(0{,}5\,|\,0{,}5)$ auf dem Weg dadurch nass wird.

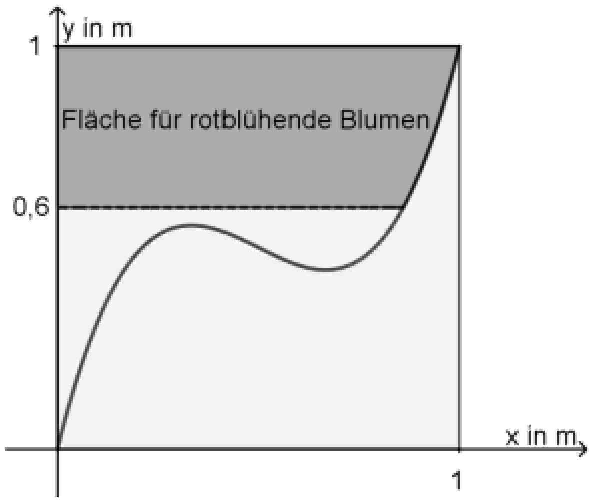


Abbildung 2

Ein geradliniger Weg soll von der südwestlichen Ecke der Gartenfläche ausgehen und weiter östlich ohne Knick wieder an den Weg aus dem obigen Modell anschließen.
Skizzieren Sie den geradlinigen Weg in der Abbildung 2.
Ermitteln Sie die x-Koordinate des Anschlusspunktes. (18 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1B auf der nächsten Seite

Fortsetzung Aufgabe 1B

c) Ein zweites Modell verwendet für den Weg, der von der westlichen zur östlichen Grenze der Gartenfläche verläuft, den Graphen einer Exponentialfunktion g mit $g(x) = b \cdot e^{-k \cdot x}$, $0 \le x \le 1$, $0 < b \le 1$, $k > 0$. Dabei werden x und $g(x)$ jeweils in Metern angegeben.
Erläutern Sie, welchen Einfluss die Wahl der Parameter b und k auf den Schnittpunkt des Weges mit der westlichen Grenze der Gartenfläche hat.
Bestimmen Sie für $b = 1$ einen Wert für k so, dass die Gartenfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Teilstücke aufgeteilt wird.
Für das Modell soll ein weiterer Weg angelegt werden. Sein Verlauf entsteht durch Spiegelung des Graphen von g mit $b = \frac{4}{5}$ und $k = \frac{8}{5}$ an der Geraden zu $y = \frac{2}{5}$.
Bestimmen Sie eine zu diesem Weg passende Funktionsgleichung. (11 BE)

d) Bei gleicher Bodenbeschaffenheit verursacht die Pflege von Blumen und Sträuchern pro m^2 gleiche Kosten. Auf der Gartenfläche unterscheidet sich aber die Bodenbeschaffenheit der westlichen Hälfte von der der östlichen Hälfte. Dies hat zur Folge, dass die Pflege der Sträucher pro m^2 für die westliche Hälfte doppelt so hohe Kosten verursacht wie die für die östliche Hälfte.
Ermitteln Sie für das zweite Modell aus Aufgabenteil c) für den Fall $b = k = 1$, um welchen Faktor die Pflegekosten für die Sträucher der westlichen Hälfte dadurch teurer sind als die Pflegekosten für die Sträucher der östlichen Hälfte. (6 BE)

Aufgabe 2A

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

a) Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zwei Drittel dieser Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen,
- nur einer der ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommt.

Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %.
Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen. (7 BE)

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die nicht zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt 10 %.

b) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen.

Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, einen Mindestwert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau. (8 BE)

c) Eine Fahrt mit dem Ausflugsschiff kostet 25 €, die bereits bei der Reservierung bezahlt und bei Nichtantritt auch nicht erstattet werden. Kommt es zu einer Überbuchung, erhalten Kunden, die nicht mitfahren können, den Fahrpreis zurück und zusätzlich 25 € Entschädigung. Bei jeder Fahrt entstehen dem Unternehmen unabhängig von der Anzahl der teilnehmenden Personen Kosten in Höhe von 800 €.

Begründen Sie, dass der zu erwartende Gewinn pro Ausflugsfahrt mit dem Term

$$64 \cdot 25 - 800 - 50 \cdot \binom{64}{61} \cdot 0{,}9^{61} \cdot 0{,}1^{3} - 100 \cdot \binom{64}{62} \cdot 0{,}9^{62} \cdot 0{,}1^{2} - 150 \cdot \binom{64}{63} \cdot 0{,}9^{63} \cdot 0{,}1 - 200 \cdot 0{,}9^{64}$$

berechnet werden kann.

Untersuchen Sie, ob es sich für das Unternehmen finanziell lohnen würde, statt der 64 Reservierungen zukünftig nur noch 62 Reservierungen für eine Ausflugsfahrt anzunehmen, wobei der zu erwartende Gewinn für 64 Reservierungen $792{,}20$ € beträgt. (9 BE)

Aufgabe 2B

2000 Personen besitzen eine Jahreskarte eines Schwimmbades. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

a) Es gilt $P(X=210)\approx 2{,}2\,\%$.

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Tag mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X mindestens eine halbe Standardabweichung größer als der Erwartungswert der Zufallsgröße ist.

Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Tag weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist.

Nennen Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das Baumdiagramm in Abbildung 1 dargestellt wird.

Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ beträgt.

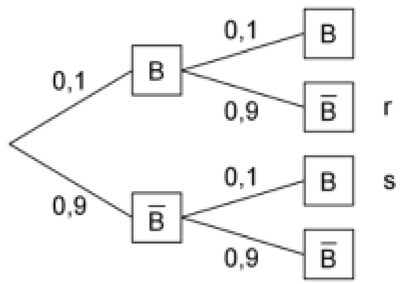


Abbildung 1

(13 BE)

An einem bestimmten Tag ist das Schwimmbad zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Zeitpunkte, zu denen die Badegäste das Schwimmbad betreten, mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 14,5 und der Standardabweichung 2 beschrieben werden können. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der Abbildung 2 dargestellt; dabei ist t die seit 00:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

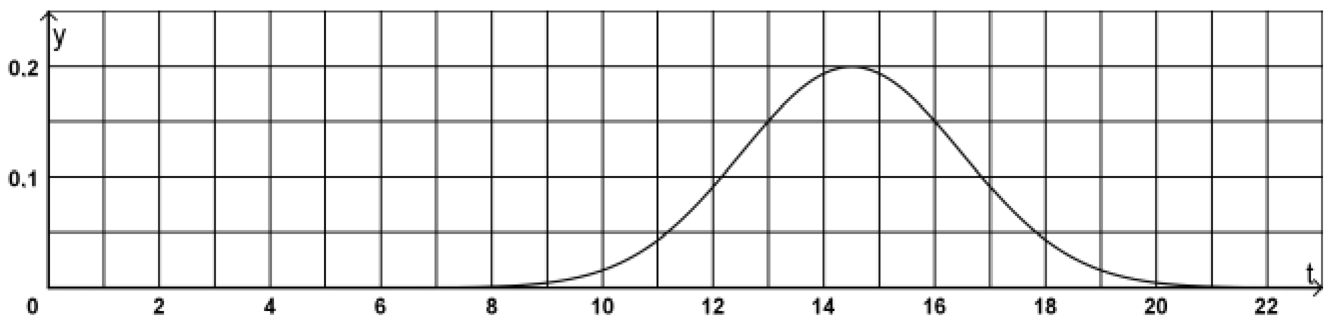


Abbildung 2

b) Geben Sie den Zeitraum mit einer Länge von einer Stunde an, für den an diesem Tag mit der größten Anzahl eintreffender Badegäste zu rechnen ist.

Untersuchen Sie allein mit Hilfe der Abbildung 2, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Tag ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt, größer als 50 % ist.

Fortsetzung Aufgabe 2B auf der nächsten Seite

Fortsetzung Aufgabe 2B

Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad von 2500 Badegästen besucht.
Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt mit dem Eintreffen des 1500. Badegasts zu rechnen ist.

Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Argumentation:
Das Schwimmbad ist nur zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Deshalb ist es nicht sinnvoll, das Eintreffen der Badegäste mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße zu beschreiben, die für alle reellen Zahlen definiert ist. (11 BE)

Aufgabe 3A

Ein Unternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe einer Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die xy-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320\,|\,-1750\,|\,0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990\,|\,6990\,|\,0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a) Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.
Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell

entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, verläuft.

Der Parameter r gibt die Flugdauer in 1000 Sekunden an.
Weisen Sie nach, dass der Punkt P mit den Koordinaten $(4827\,|\,872\,|\,50)$ die Position der Drohne nach 300 Sekunden Flugdauer beschreibt.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne in Metern pro Sekunde während des horizontalen Flugs. (6 BE)

Während des Flugs auf der vorgesehenen Flugbahn entlang der Geraden g aus Aufgabenteil a) wird die Flugbahn von einer Bodenstation aus überwacht. Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0\,|\,0\,|\,0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

b) Weisen Sie nach, dass sich die Drohne auf dem horizontalen Teil der vorgesehenen Flugbahn über eine Strecke von mehr als 8,5 km innerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet.
Die Bodenstation ändert die Flugbahn der Drohne: Die Drohne weicht im Modell im Punkt $Q(3996\,|\,1746\,|\,50)$ von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt $A(4050\,|\,1810\,|\,0)$ dargestellt wird.
Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn gegenüber dem Gelände beim Anflug auf den Ausweichlandeplatz.
Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert. (11 BE)

Fortsetzung Aufgabe 3A auf der nächsten Seite

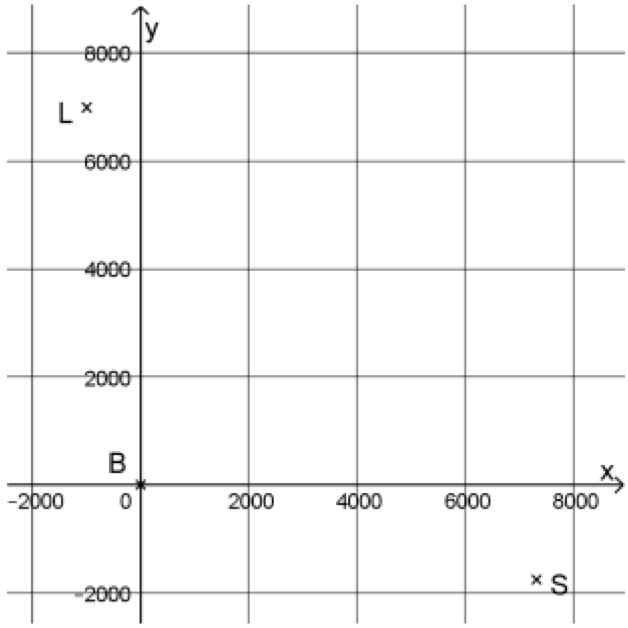
Fortsetzung Aufgabe 3A

Nach der Landung auf dem Ausweichlandeplatz steuert die Drohne eine Position an, die sich in einer Höhe von 50 m befindet und vom Startplatz, vom regulären Landeplatz und von der Bodenstation gleich weit entfernt ist. Diese Position wird durch den Punkt R beschrieben.

c) Die Ebene E enthält alle Punkte, die von S und L den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

Stellen Sie die Ebene E in der untenstehenden Abbildung dar.

Beschreiben Sie auch mithilfe einer grafischen Darstellung in der Abbildung, wie man die Koordinaten von R ermitteln kann. (7 BE)



Aufgabe 3B

Die Abbildung 1 zeigt den Körper OBCDEF mit $B(4{,}5\,|\,0\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,12)$, $E(4{,}5\,|\,0\,|\,9)$ und $F(0\,|\,6\,|\,10{,}5)$.
Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene, die Seitenflächen stehen dazu senkrecht.
Die Punkte G und H liegen auf den Kanten $\overline{OD}$ bzw. $\overline{CF}$ und haben die gleiche z-Koordinate wie der Punkt E.
Gegeben ist die Ebene

$$W: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$$

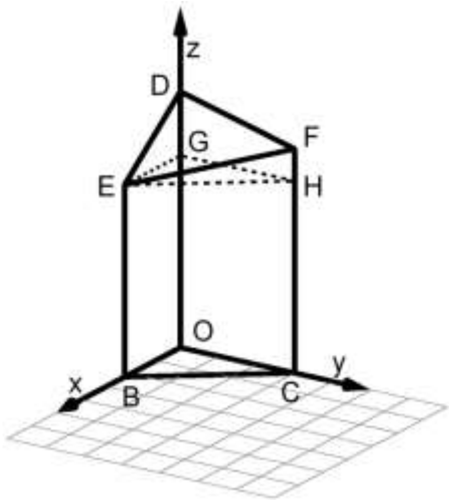


Abbildung 1

a) Begründen Sie, dass das Viereck DGHF ein Trapez ist, und bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.
Geben Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte von W mit den Kanten $\overline{OD}$ und $\overline{CF}$ an.
Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Figur ein, in der W den Körper OBCDEF schneidet.
Die Ebene W schneidet die Strecke $\overline{GH}$.
Berechnen Sie das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt diese Strecke teilt. (11 BE)

b) Der Punkt $M(m_1\,|\,m_2\,|\,0)$ hat von allen Seiten des Dreiecks OBC den gleichen Abstand.
Begründen Sie, dass $m_1 = m_2$ gilt.
Die Gleichungen (I) und (II) liefern gemeinsam einen Ansatz zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes M:

(I) $\left(\left[\overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC}\right] - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(II) $\left|\left[\overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC}\right] - \overrightarrow{OM}\right| = m_1$

Stellen Sie die Bedeutung der beiden Gleichungen im xy-Koordinatensystem in Abbildung 2 dar. (7 BE)

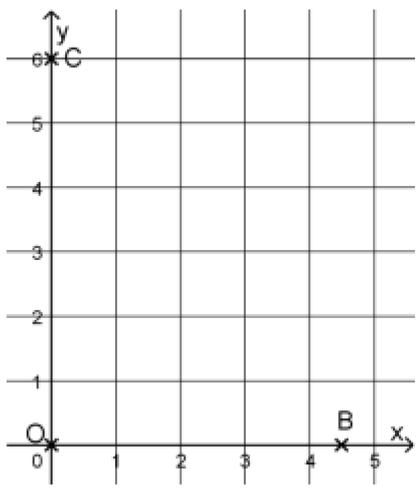


Abbildung 2

Betrachtet werden die Geraden $g_u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 6-6u \\ 12u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) Ermitteln Sie diejenigen Werte von u, für die g_u die xy-Ebene jeweils unter einem Winkel der Größe 30° schneidet.
Begründen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist:
Jeder Punkt der Ebene W liegt auf einer der Geraden g_u. (6 BE)